ДЕНЕЖНАЯ ПОЛИТИКА И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Вереникин А.О.,
д.э.н., профессор
МГУ им. М.В. Ломоносова
экономический факультет
(г. Москва, Россия)[92]

Аннотация

В статье проанализирована агрегированная динамика экономической системы, описываемой классической и кейнсианской функциями совокупного спроса при совокупном предложении с учетом и без учета ожиданий. Решение возникающих при этом дифференциальных уравнений показывает, что инфляционная подпитка может стимулировать увеличение потенциального уровня ВВП. В частности, в отличие от статичного равновесия, при отсутствии ожиданий в неоклассической концепции так же, как и в кейнсианской, исчезает нейтральность денег, и данные два подхода оказываются асимптотически эквивалентыми.

Ключевые слова: кривая Филлипса, монетарное правило, статичные ожидания, динамические функции совокупного спроса и предложения, инфляционная спираль.

JEL-коды: E 120, E 130, E 310.

---

[92] verenikin@econ.msu.ru

Введение. Основы моделирования совокупного спроса и предложения в динамике

Рассмотрим вначале базовые подходы к динамическому моделированию совокупного предложения. В явном виде динамику в моделирование совокупного предложения привносит кривая Филлипса[93]. Рассмотрим вначале теоретические зависимости, лежащие в основе исходного, авторского варианта кривой Филлипса[94].

При стандартных функциях спроса и предложения равновесие на рынке труда (w^*, L^*) является устойчивым по Вальрасу (рис. 1), когда ставка заработной платы (w) рассматривается в качестве независимой, а величина занятости (L) – зависимой переменной.

Пусть ставка заработной платы превышает равновесный уровень: $w_1 > w^*$. Тогда предложение труда (L^S) будет превышать спрос на труд (L^D), и будет иметь место безработица $(U = L^S - L^D > 0)$, в нашем случае $L_1^S > L_1^D$. Значит, в результате конкуренции между потенциальными работниками за рабочие места с течением времени ставка заработной платы будет снижаться, стремясь к равновесному значению. Допустим, наоборот, что уровень заработной платы ниже равновесного: $w_2 < w^*$. Значит, будет наблюдаться избыточный спрос на рынке труда $(Z = L^D - L^S > 0)$, в данном случае $L_2^S < L_2^D$. Следовательно, со временем под влиянием конкуренции между работодателями за потенциальных работников ставка заработной платы будет возрастать вплоть до равновесного значения (рис. 1). Таким образом, направление изменения ставки заработной платы будет зависеть от ее соотношения со своим равновесным уровнем: скорость изменения ставки заработной платы $\left(\dot{w} = \frac{dw}{dt}\right)$ представляет собой убывающую зависимость от разности между ее фактическим и равновесным значениями (рис. 2)[95]:

$$\dot{w} = f(w - w^*). \qquad (1)$$

Избыточный спрос на рабочую силу в относительном измерении задается следующим соотношением: $z \equiv \frac{Z}{L+U} = \frac{L^D - L^S}{L+U}$. При превышении фактического уровня заработной платы над равновесным $(w > w^*)$, наблюдается безработица $(L^S > L^D)$, т.е. избыточный спрос отрицателен: $z < 0$. И наоборот, если $w < w^*$, то $L^S < L^D$, т.е. избыточный спрос положителен: $z > 0$. Соответственно в условиях равновесия, при $w = w^*$ и $L^S = L^D$, избыточный спрос будет нулевым: $z = 0$.

[93] Phillips A.W. The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1862-1957 // Economica. — 1958. — № 100.
[94] Ср.: Lipsey R.G. The relationship between unemployment and the rate of change of the money wage rates in the U.K. 1862–1957: a further analysis // Economica. — 1960 (Feb.).
[95] Здесь и далее переменная с точкой вверху (например, $\dot{w}$) обозначает соответствующую производную по времени.

Таким образом, избыточный спрос на труд $z = g(w)$ представляет собой убывающую зависимость от разности между фактическим и равновесным уровнями ставки заработной платы $(z = g(w - w^*))$, следовательно, и обратная функция:

$$w = w^* + g^{-1}(z) \tag{2}$$

также будет являться всюду убывающей (рис. 3).

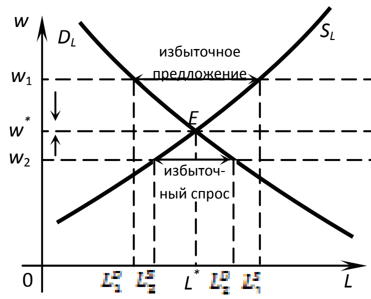


Рис. 1 Устойчивость по Вальрасу равновесия на рынке труда

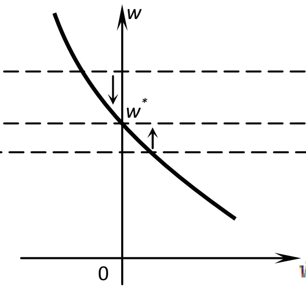


Рис. 2. Динамика ставки заработной платы

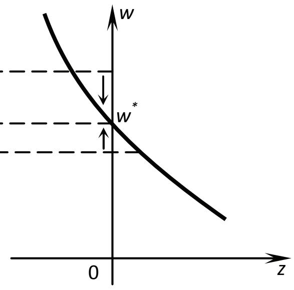


Рис. 3. Зависимость избыточного спроса на труд от ставки заработной платы

Объединяя функции (1) и (2), в силу их свойств получаем возрастающую зависимость скорости изменения ставки заработной платы от избыточного спроса в относительном выражении:

$$\dot{w} = f(g^{-1}(z)) = h(z). \tag{3}$$

Кривая Бевериджа подразумевает обратную зависимость между вакантными рабочими местами (*V*) и безработными (*U*): чем больше вакансий, тем выше вероятность трудоустройства незанятых[96]. И наоборот, увеличение числа безработных означает растущую нехватку вакантных рабочих мест: предложение труда не находит соответствующего спроса – вакансий. Аналогичная зависимость верна и для относительных величин – уровней безработицы (u) и вакантности рабочих мест (v): $v \equiv \frac{V}{L+U} = \varphi\left(\frac{U}{L+U}\right) = \varphi(u)$ (рис. 4).

[96] См.: Рощин С.Ю., Разумова Т.О. Экономика труда. – М.: Инфра-М, 2001.

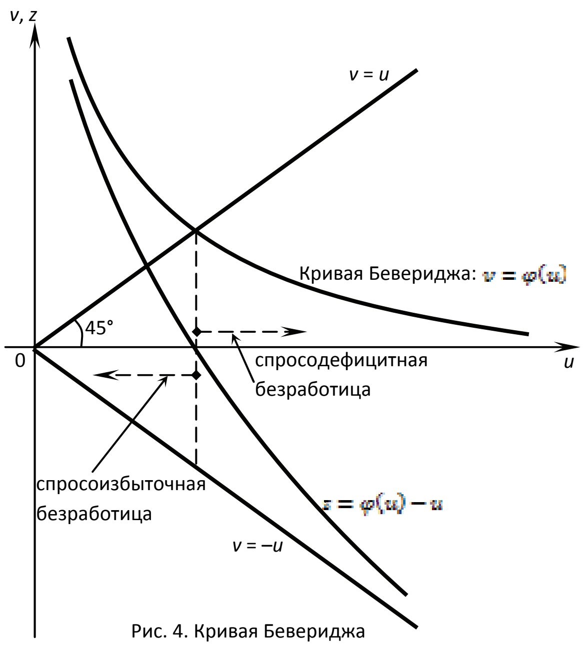


Рис. 4. Кривая Бевериджа

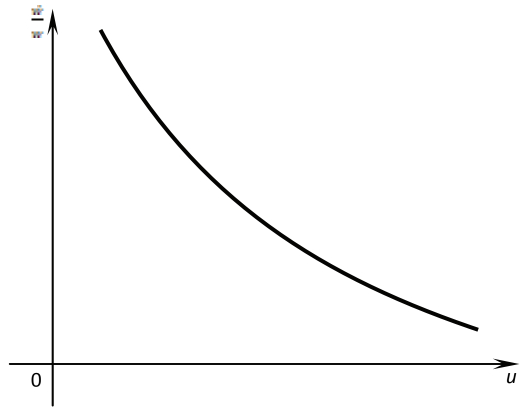


Рис. 5. Исходный вариант кривой Филлипса

Избыточный спрос на труд в относительном измерении представляет собой разность между уровнями вакансий и безработицы:

$$z \equiv \frac{Z}{L+U} = \frac{L^D - L^S}{L+U} = \frac{L+V}{L+U} - \frac{L+U}{L+U} = \frac{V}{L+U} - \frac{U}{L+U} = v - u.$$

А значит, в силу свойств кривой Бевериджа относительная величина избыточного спроса на труд:

$$z = v - u = \varphi(u) - u \tag{4}$$

является убывающей функцией уровня безработицы.

Объединяя зависимости (3) и (4), в силу их свойств, получаем убывающую функцию скорости изменения ставки заработной платы от уровня безработицы:

$$\dot{w} = h(\varphi(u) - u). \tag{5}$$

Одновременно в силу (2) и (4) величина ставки заработной платы представляет собой возрастающую зависимость от уровня безработицы:

$$w = w^* + g^{-1}(\varphi(u) - u). \tag{6}$$

В итоге, поделив соотношение (5) на (6), получаем исходный, авторский вариант кривой Филипса:

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{h(\varphi(u) - u)}{w^* + g^{-1}(\varphi(u) - u)} = \psi(u). \tag{7}$$

В силу свойств (5) и (6) можно сделать вывод о том, что темп роста ставки заработной платы находится в убывающей зависимости по отношению к уровню безработицы (рис. 5).

Если допустить, что равновесие на рынке труда сопряжено с определенным «естественным» уровнем безработицы (u^*), который включает фрикционную и структурную составляющие, тогда во всех рассуждениях, проделанных выше, должен рассматриваться фактический уровень безработицы, скорректированный на данную «естественную» норму $(u-u^*)$. С учетом наличия естественного уровня безработицы соответствующая (7) линейная функция Филлипса будет иметь вид (рис. 6): $\frac{\dot{w}}{w}=-h(u-u^*)$. В более современной трактовке кривой Филлипса, предложенной П. Самуэльсоном и Р. Солоу[97], предполагается, что темп роста общего уровня цен $\left(\pi(t)=\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}\right.$, где $P(t)$ – уровень цен в момент t, $\left.\dot{P}(t)=\frac{dP(t)}{dt}\right)$ пропорционален относительной скорости изменения ставки заработной платы как важнейшей компоненте инфляции издержек (рис. 7): $\pi(t)=\gamma\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}=-\alpha(u(t)-u^*)$, где $w(t)$ и $u(t)$ – соответственно ставка заработной платы и уровень безработицы в момент t; или в дискретном времени:

$$\pi_t=\frac{P_t-P_{t-1}}{P_{t-1}}=-\alpha(u_t-u^*), \tag{8}$$

где u_t, P_t и π_t – соответственно фактические уровни безработицы, цен и инфляции в году t, α – коэффициент чувствительности инфляции к изменению уровня безработицы.

В законе Оукена сформулирована обратная зависимость между ВВП и величиной безработицы:

$$\frac{Y_t-Y^*}{Y^*}=-\beta(u_t-u^*), \tag{9}$$

где Y_t – фактический ВВП в году t, Y^* – потенциально возможный ВВП при полной занятости ресурсов, или *экономический потенциал*; β – коэффициент Оукена, постоянный для данной экономики[98].

Объединяя закон Оукена (9) и кривую Филлипса (8), получаем функцию совокупного предложения:

$$Y_t=Y^*+Y^*\frac{\beta}{\alpha}\frac{(P_t-P_{t-1})}{P_{t-1}}; \text{ или } Y_t=Y^*+Y^*\frac{\beta}{\alpha}\pi_t. \tag{10}$$

Полагая, что в базовом периоде экономика функционировала на уровне потенциального ВВП:

$$Y^*=Y_{t-1}, \tag{11}$$

получаем:

$$\frac{Y_t-Y_{t-1}}{Y_{t-1}}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{(P_t-P_{t-1})}{P_{t-1}}.$$

В непрерывном времени эта функция приобретает вид $\left(\dot{Y}(t)=\frac{dY(t)}{dt}\right)$:

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\beta}{\alpha}\pi. \tag{12}$$

---

[97] Samuelson P.A., Solow R.M. Analytical aspects of anti-inflation policy // American economic review. — 1960. — Vol. 50. — № 2.

[98] Если предположить размеры экономически активного населения $(L+U)$ постоянной величиной, то закон Оукена можно рассматривать как следствие зависимости между объемом занятости и произведенным ВВП, отраженной макроэкономической производственной функцией $Y=Y(L)$.

Итак, в соответствии с уравнением совокупного предложения, успешная финансовая политика может стимулировать производство.

Проанализируем взаимосвязь динамики ВВП и цен, вытекающую из функции *AS*. Для этого перепишем уравнение совокупного предложения (12) в следующем виде:

$$\frac{d\ln Y(t)}{dt} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{d\ln P(t)}{dt}.$$

Переходя от абсолютных единиц измерения к логарифмической шкале $y \equiv \ln Y$, $p \equiv \ln P$, получаем дифференциальное уравнение, представляющее собой совокупное предложение в логарифмической шкале: $\dot{y} = \frac{\beta}{\alpha}\dot{p}$. Интегрируя его $\int dy = \frac{\beta}{\alpha}\int dp + \ln c$, получаем в логарифмической шкале линейную зависимость ВВП от уровня цен: $\ln Y = \frac{\beta}{\alpha}\ln P + \ln c$. Потенцируя полученное равенство, приходим к соотношению: $Y(t) = cP(t)^{\frac{\beta}{\alpha}}$, в котором для определения константы используем начальные условия: $c = \frac{Y(0)}{P(0)^{\frac{\beta}{\alpha}}}$.

Итак, нами получена возрастающая нелинейная, степенная зависимость объема ВВП от уровня цен в каждый, данный период времени, которая заложена в функции совокупного предложения (12):

$$Y(t) = Y(0)\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}. \qquad (13)$$

В 60-е гг. XX в. М. Фридмен и Э. Фелпс дополнили уравнение кривой Филлипса ожиданиями, что дало возможность анализировать процессы акселерации инфляции, т.е. ускорения роста цен. Уравнение усиленной ожиданиями кривой Филлипса имеет вид: $\pi_t = -\alpha(u_t - u^*) + \pi_t^e$, где π_t^e – ожидаемый уровень инфляции в году t. Учет ожиданий приводит к сдвигу кривой Филлипса вправо-вверх (рис. 8).

Уравнение усиленной ожиданиями кривой Филлипса можно переписать в следующей форме: $u_t - u^* = -\frac{1}{\alpha}(\pi_t - \pi_t^e)$. Подключая закон Оукена (9), получаем динамическое уравнение *AS* с учетом ожиданий:

$$\frac{Y_t - Y^*}{Y^*} = \frac{\beta}{\alpha}(\pi_t - \pi_t^e). \qquad (14)$$

Рис. 6. График первоначальной функции Филлипса с учетом естественного уровня безработицы

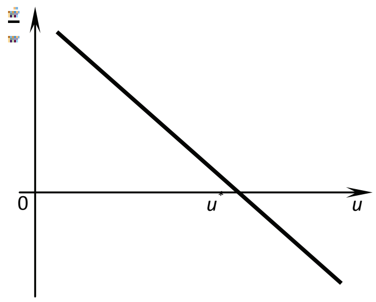


Рис. 7. График функции Филлипса без учета инфляционных ожиданий

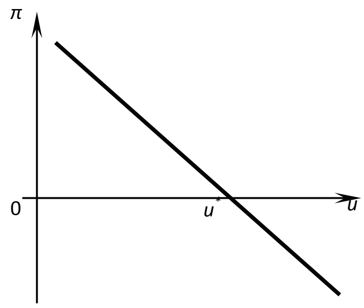
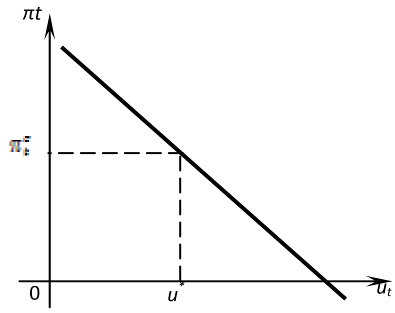


Рис. 8. Усиленная ожиданиями кривая Филлипса



Рассмотрим теперь совокупное предложение с ожиданиями как зависимость ВВП от уровня цен. Предполагая соответствие ВВП базового периода потенциальному уровню (11) и переходя к пределу по временную шагу, стремящемуся к нулю, превращаем дискретное уравнение AS (14) в его непрерывный аналог: $\frac{\frac{dY(t)}{dt}}{Y(t)} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\frac{dP(t)}{dt}}{P(t)} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\frac{dP_e(t)}{dt}}{P_e(t)}$, где $P_e(t)$ – ожидаемый уровень цен в момент t. Используя P_e вместо P в знаменателе последней дроби в правой части данного выражения, мы вводим элемент адаптивности ожиданий (ср. (10.3). Это позволяет осуществить переход к логарифмической шкале измерений: $\frac{d\ln Y}{dt} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{d\ln P}{dt} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{d\ln P_e}{dt}$.

Перепишем данное уравнение динамики ВВП в форме соотношения между дифференциалами базовых переменных, характеризующих совокупное предложение: $d\ln Y = \frac{\beta}{\alpha}d\ln P - \frac{\beta}{\alpha}d\ln P_e$. Интегрируя $\left(\ln Y = \frac{\beta}{\alpha}\ln P - \frac{\beta}{\alpha}\ln P_e + \ln c\right)$, а затем потенцируя его, приходим к выражению ВВП в виде функции агрегированного уровня цен: $Y(t) = c\left(\frac{P(t)}{P_e(t)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$. Для определения константы рассчитаем величину ВВП в исходный момент времени: $c = Y(0)\left(\frac{P_e(0)}{P(0)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$. В итоге видоизмененная по сравнению с (13) зависимость между ВВП и уровнем цен, соотнесенным с его ожидаемыми значениями, будет выглядеть так: $Y(t) = Y(0)\left(\frac{\frac{P(t)}{P_e(t)}}{\frac{P(0)}{P_e(0)}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Рассмотрим простейшую ситуацию адаптивных – так называемых статичных ожиданий: $\pi_t^e = \pi_{t-1}$. Тогда динамическая функция AS принимает вид:

$$\frac{Y_t - Y^*}{Y^*} = \frac{\beta}{\alpha}(\pi_t - \pi_{t-1}), \text{ или } Y_t = Y^* + \frac{\beta}{\alpha}Y^*(\pi_t - \pi_{t-1}). \qquad (15)$$

В непрерывном времени ей соответствует дифференциальное уравнение:

$$Y(t) = Y^* + \frac{\beta}{\alpha}Y^*\dot{\pi}(t). \qquad (16)$$

Будем теперь полагать, что в базовом периоде экономика функционировала на уровне потенциального ВВП (11). Тогда получаем динамическую функцию *AS* с учетом статичных ожиданий: $\frac{Y_t-Y_{t-1}}{Y_{t-1}}=\frac{\beta}{\alpha}(\pi_t-\pi_{t-1})$. В непрерывном времени эта функция имеет вид: $\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\beta}{\alpha}\dot{\pi}$. (17)

Из функции *AS* со статичными ожиданиями (17) вытекает линейная зависимость между динамикой ВВП, измеренного в логарифмической шкале, и уровнем инфляции в каждый данный момент времени: $d\ln Y=\frac{\beta}{\alpha}d\pi$, или $dy=\frac{\beta}{\alpha}d\pi$, т.е. $y=\frac{\beta}{\alpha}\pi+c$, где константа определяется начальными условиями: $c=\ln Y(0)-\frac{\beta}{\alpha}\pi(0)$.

Взаимосвязь ВВП и уровня цен данного периода представляет собой дифференциальное уравнение: $d\ln P=\frac{\alpha}{\beta}\left(\ln Y(t)+\ln Y(0)-\frac{\beta}{\alpha}\pi(0)\right)dt$. Интегрируя его, получаем: $\ln P(t)=\frac{\alpha}{\beta}\int\ln Y(t)dt+\left(\frac{\alpha}{\beta}\ln Y(0)-\pi(0)\right)t+\ln c_1$. Потенцирование дает искомую траекторию динамики уровня цен: $P(t)=c_1\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}\ln Y(0)t}}{e^{\pi(0)t}}e^{\frac{\alpha}{\beta}\int\ln Y(t)dt}=c_1\frac{Y(0)^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{e^{\pi(0)t}}e^{\frac{\alpha}{\beta}\int\ln Y(t)dt}$. Константа интегрирования определяется начальным условием: $P(0)=c_1$. В итоге получаем нелинейную возрастающую взаимосвязь между уровнем цен и объемом ВВП каждого периода[99]: $P(t)=P(0)\frac{Y(0)^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{e^{\pi(0)t}}e^{\frac{\alpha}{\beta}\int\ln Y(t)dt}$.

Рассмотрим теперь базовые подходы к динамическому моделированию совокупного спроса. Денежный сектор в неоклассической концепции описывается уравнением количественной теории денег:

$$MV=PY, \tag{18}$$

или кембриджским уравнением обмена:

$$M=kPY, \tag{19}$$

где M – денежная масса, V – скорость обращения денег, $k=\frac{1}{V}$ – коэффициент предпочтения ликвидности.

[99] Рассмотрим альтернативную трактовку совокупного предложения с ожиданиями как зависимости ВВП от уровня цен. Будем, как и ранее, опираться на динамическую функцию совокупного предложения (14). При этом снова будем допускать некоторый элемент адаптивности ожиданий, полагая при расчете π_t^e в знаменателе $P_e=P$: $\pi_t^e=\frac{\frac{dP_e}{dt}}{P_e}$. Пусть цены измерены в логарифмической шкале: $\pi_t=\frac{d\ln P}{dt}$, $\pi_t^e=\frac{d\ln P_e}{dt}$. При дискретном шаге времени имеем: $\pi_t=\ln P_t-\ln P_{t-1}$, $\pi_t^e=\ln P_t^e-\ln P_{t-1}$. Тогда усиленную ожиданиями функцию совокупного предложения можно представить как зависимость ВВП не от фактических и ожидаемых темпов инфляции, а от соответствующих уровней цен, измеренных в логарифмической шкале: $Y_t=Y^*+\frac{\beta}{\alpha}Y^*(\ln P_t-\ln P_t^e)$, или $\ln P_t=\ln P_t^e+\frac{\alpha}{\beta Y^*}(Y_t-Y^*)$. В результате для каждого данного временного интервала *t* нами получена функция совокупного предложения, или кривая Лукаса: $p=p_e+\gamma(Y-Y^*)$, где $p=\ln P_t$, $p_e=\ln P_t^e$, $\gamma=\frac{\alpha}{\beta Y^*}$.

В уравнении количественной теории денег (18) делается акцент на трансакционном мотиве спроса на деньги, тогда как в кембриджском уравнении обмена (19) подчеркивается спрос на деньги по мотиву предосторожности. Последний возникает по причине рассогласования во времени потоков поступления денег и платежей, которые имеют стохастическую природу, и необходимости держать из-за этого определенный страховой запас денежной наличности для предотвращения возможных потерь. Соответственно, чем больше этот запас, удельная величина которого отражается коэффициентом предпочтения ликвидности k, тем меньше скорость обращения денег V, что отражает соотношение между двумя подходами в неоклассической трактовке денежного сектора экономической системы (18) и (19)[100].

Продифференцируем тождество количественной теории денег (18) по времени: $\frac{d}{dt}(M(t)V(t)) = \frac{d}{dt}(P(t)Y(t))$, т.е. $\frac{dM}{dt}V + \frac{dV}{dt}M = \frac{dP}{dt}Y + \frac{dY}{dt}P$. Поделив левую и правую части последнего равенства соответственно на левую и правую части тождества (18), после очевидных преобразований приходим к соотношению между темпами прироста денежной массы, скорости обращения денег, уровня цен и ВВП:

$$\frac{\frac{dM(t)}{dt}}{M(t)} + \frac{\frac{dV(t)}{dt}}{V(t)} = \frac{\frac{dP(t)}{dt}}{P(t)} + \frac{\frac{dY(t)}{dt}}{Y(t)}, \text{ или } \frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{Y}}{Y}. \qquad (20)$$

Используя формулу дифференциала натурального логарифма[101], в соотношении темпов прироста можно перейти к логарифмической шкале измерения анализируемых показателей:

$$\dot{m} + \dot{v} = \pi + \dot{y},$$

где $\dot{p} \equiv \pi$ – уровень инфляции, $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ – темп прироста денежной массы M, $m \equiv \ln M$; $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ – темп прироста скорости обращения денег, $v \equiv \ln V$; $\dot{y}$ – темп пророста ВВП.

Таким образом, для обеспечения нулевого темпа инфляции «монетарное правило» в количественной теории денег рекомендует ориентировать темп прироста денежной массы на темп прироста ВВП с поправкой на изменение скорости обращения денег.

Динамическая функция совокупного спроса в кейнсианской концепции строится на основе модели *IS*/*LM*, изучающей процессы взаимодействия отдельных рынков, которые приспособляются к совместному равновесию. Натуральное балансовое равенство, характеризующее реальный сектор экономики, – это основное макроэкономическое тождество: $Y = C + I + G$, где C, I и G – соответственно потребительские, инвестиционные и государственные расходы. На базе этого тождества выводится функция *IS*, которая описывает равновесие

[100] Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004.

[101] $\frac{dx}{x} = d\ln x$, $x > 0$, откуда следует, что $\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = \frac{d\ln x}{dt}$, или $\frac{\dot{x}}{x} = \dot{\ln x}$.

на товарных рынках и характеризует взаимосвязь между уровнем дохода и ставкой процента, когда сбережения (S) равны инвестициям: $S \equiv Y - (C + G) = I$.

Кейнсианская потребительская функция предполагает (в простейшем случае линейную) зависимость расходов на потребительские товары от располагаемого дохода, которая с учетом наличия государственного сектора имеет вид: $C = C_0 + MPC(Y - T)$, где $C_0 = const$ – автономное (не зависящее от уровня дохода) потребление, $MPC = const$ – предельная склонность к потреблению, T – налоговые выплаты. В кейнсианской теории, аналогично неоклассике, рассматривается зависимость инвестиций от процентной ставки (r): $I = I(r)$. В дальнейшем для упрощения анализа будем рассматривать линейную зависимость: $I = I_0 - dr$, где I_0 и d – постоянные коэффициенты.

Если в экономике применяется система подоходного налогообложения ($T = tY$, где $t = const$ – ставка налога), то функция совокупных расходов на потребление со стороны домашних хозяйств и государства будет выглядеть так: $C + G = C_0 + G_0 + MPC(1 - t)Y$. Здесь для простоты предполагается независимость государственных расходов от уровня ВВП и ставки процента: $G = G_0 = const$. При этом уравнение *IS* приобретает вид:

$$Y = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1 - MPC(1-t)} - \frac{dr}{1 - MPC(1-t)}; \qquad (21)$$

или

$$r = \frac{C_0 + I_0 + G_0}{d} - \frac{1 - MPC(1-t)}{d} Y.$$

Анализ денежного рынка в кейнсианской модели усложняется по сравнению с неоклассической теорией. Трансакционный спрос и спрос на деньги по мотиву предосторожности моделируются в кейнсианской теории так же, как и в рамках неоклассического направления экономического анализа, – на основе кембриджского уравнения обмена (19). Отличием же кейнсианской денежной теории является особенная роль, которая отводится в ней спросу на деньги со стороны активов, основным фактором которого выступает ставка процента *r*: $\frac{M_d}{P} = kY - fr$, где M_d – спрос на деньги, k и f – постоянные коэффициенты[102].

Функция *LM* определяется равновесием спроса и предложения на денежном рынке и отражает взаимосвязь между уровнем дохода и ставкой процента. Она имеет выражение:

$$Y = \frac{1}{k}\frac{M}{P} + \frac{f}{k}r, \text{ или } r = \frac{k}{f}Y - \frac{1}{f}\frac{M}{P}. \qquad (22)$$

Выражения (21) и (22) дают условия макроравновесия $(IS = LM)$ с точки зрения ключевых показателей – уровня ВВП и ставки процента: $\frac{C_0 + I_0 + G_0}{1 - MPC(1-t)} - \frac{dr}{1 - MPC(1-t)} = \frac{1}{k}\frac{M}{P} + \frac{f}{k}r$, откуда:

[102] Для простоты здесь рассматривается линейная зависимость спроса на деньги в реальном выражении $\frac{M_d}{P}$ от ставки процента.

$$r = \frac{k(C_0+I_0+G_0)}{kd+f(1-MPC(1-t))} - \frac{(1-MPC(1-t))\frac{M}{P}}{kd+f(1-MPC(1-t))}.$$

Используя, например, уравнение *LM* (22) и выражение для равновесной ставки процента, рассчитаем величину совокупного эффективного спроса *AD*:

$$Y = \frac{f(C_0+I_0+G_0)}{kd+f(1-MPC(1-t))} + \frac{d}{kd+f(1-MPC(1-t))}\frac{M}{P}. \qquad (23)$$

1. Элементарная динамическая модель *AD*/*AS* при классической функции *AD* и простейшем уравнении *AS*

Перейдем теперь к анализу динамического взаимодействия совокупного спроса и предложения. Рассмотрим сначала элементарную динамическую модель *AD*/*AS* при классической функции *AD* и простейшем уравнении *AS*. Будем использовать уравнение количественной теории денег (18). В соответствии с «монетарным правилом» в количественной теории денег (20) при предположении о постоянстве скорости обращения денег должно выполняться следующее соотношение между темпами роста денежной массы, уровня цен и ВВП:

$$\dot{Y} = Y(\dot{m} + \pi). \qquad (24)$$

Запишем уравнение *AS* (10) в следующем виде: $\pi(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y(t)-Y^*}{Y^*}\right)$.

Динамическое равновесие $(AD = AS)$ будет выглядеть так: $\frac{\dot{Y}}{Y} = \dot{m} - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y-Y^*}{Y^*}\right)$, или $\dot{Y} - Y\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = -\frac{\alpha}{\beta Y^*}Y^2$.

Мы получили дифференциальное уравнение Бернулли вида[103]: $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n$, $n \neq 1$, или $y^{-n}\frac{dy}{dt} + p(t)y^{1-n} = q(t)$. Заменой $y^{1-n} = z$ оно сводится к линейному дифференциальному уравнению. В нашем случае имеем: $Y^{-2}\dot{Y} - Y^{-1}\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = -\frac{\alpha}{\beta Y^*}$. Здесь $z = Y^{-1}$, соответственно $Y = z^{-1}$. Учитывая, что $\frac{dz}{dt} = -Y^{-2}\frac{dY}{dt}$, имеем: $\dot{z} + z\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta Y^*}$.

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Поэтому для решения данного уравнения необходимо вначале решить соответствующее однородное уравнение $\dot{z} + z\left(\dot{m} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$. Разделяем переменные: $\frac{dz}{z} = -dm - \frac{\alpha}{\beta}dt$, или $d(\ln z + m) = -\frac{\alpha}{\beta}dt$, откуда $\int d(\ln z + m) = -\frac{\alpha}{\beta}\int dt + \ln c$, т.е. $z = \frac{c}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}$.

[103] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 2-е изд. – М.: Наука, 1969.

Для решения исходного неоднородного уравнения применяем метод вариации постоянной: $z(t)=\frac{c(t)}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}$. Учитывая, что $\frac{dz}{dt}=\frac{\frac{dc}{dt}M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}-ce^{\frac{\alpha}{\beta}t}\left(\frac{dM}{dt}+M(t)\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}\right)^2}=\frac{\frac{dc}{dt}}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}-\frac{c(t)\frac{dM}{dt}}{(M(t))^2e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}-\frac{c(t)\frac{\alpha}{\beta}}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}$, подставляем данные выражения вместо z и $\dot{z}$ в исходное уравнение: $\frac{\dot{c}}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}-\frac{c(t)}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}\left(\frac{1}{M(t)}\frac{dM}{dt}+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{c(t)}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}\left(\frac{1}{M(t)}\frac{dM}{dt}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{\alpha}{\beta Y^*}$, а значит, $\frac{\dot{c}}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}=\frac{\alpha}{\beta Y^*}$.

Интегрируем возникающее уравнение относительно варьируемого множителя: $c(t)=\frac{\alpha}{\beta Y^*}\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt+c_1$.

Таким образом, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид: $z(t)=\frac{c_1}{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}+\frac{\alpha\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}{\beta Y^*M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}=\frac{1}{Y}$, т.е. $Y(t)=\frac{M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{c_1+\frac{\alpha}{\beta Y^*}\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}$.

Константу c_1 находим по начальному условию: $c_1=\frac{M(0)}{Y(0)}$. Итак:

$$Y(t)=\frac{Y^*M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{\frac{Y^*M(0)}{Y(0)}+\frac{\alpha}{\beta}\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}. \tag{25}$$

Проанализируем поведение ВВП в пределе, когда время t стремится к бесконечности, т.е. рассмотрим:

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{Y^*M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{\frac{Y^*M(0)}{Y(0)}+\frac{\alpha}{\beta}\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}\right). \tag{26}$$

Отметим, что $\frac{\partial}{\partial t}\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt=M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$. Следовательно, поскольку производная данного интеграла $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$, как и денежная масса $M(t)$, положительна, $\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt$ монотонно возрастает.

Рассмотрим случай монотонно возрастающей динамики величины $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$. Такое ее поведение будет преобладающим, поскольку, как правило, денежная масса $M(t)$ с течением времени увеличивается. Более того, возрастающая динамика $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$ будет чаще всего сохраняться и при убывании денежной массы – за исключением крайних случаев, когда последняя будет сокращаться с исключительно высокой, экспоненциальной скоростью – быстрее, чем возрастает сомножитель $e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$.

Итак, при возрастании $M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$ в силу аналогичной динамики $\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt$ в пределе (26) присутствует неопределенность вида ∞/∞. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(Y^* M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}\right)}{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Y^*M(0)}{Y(0)} + \frac{\alpha}{\beta}\int M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt\right)}\right) = \lim_{t\to\infty} Y^*\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial t}e^{\frac{\alpha}{\beta}t} + M(t)\frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{\frac{\alpha}{\beta}M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}\right) = \lim_{t\to\infty} Y^*\left(\frac{\beta\dot{M}}{\alpha M} + 1\right).$$

Значит, в бесконечно удаленном времени динамика ВВП будет подчиняться следующему соотношению:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^* + \frac{\beta}{\alpha}Y^* \lim_{t\to\infty} \dot{m}. \qquad (27)$$

Таким образом, в классической макроэкономической теории в отличие от статического равновесия в случае, когда динамическая функция *AS* не учитывает ожидания экономических агентов, за исключением вырожденных ситуаций, когда денежная масса убывает с чрезвычайно высокой скоростью, превышающей экспоненциальную, с течением времени в пределе (при $t \to \infty$) исчезает нейтральность денег – возникает линейная зависимость между объемом ВВП и темпом прироста денежной массы. В частности, рестриктивная монетарная политика в концепции классической теории денег имеет позитивный эффект в долгосрочной перспективе, когда экономика полностью использует свой потенциал и выходит на максимально возможный объем национального производства: при $M(t) = const$, а значит, при $\dot{m} = 0$, $\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^*$.

Если предположить, что денежная масса $M(t)$ может убывать настолько быстро, что $\lim_{t\to\infty}\left(M(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}\right) = 0$, то результатом стало бы падение ВВП в пределе до нуля: $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$. Очевидно, что такая ситуация является вырожденной, и возможность проведения подобной сверхрестриктивной монетарной политики, приводящей к обвальному сокращению денежной массы с экспоненциальной скоростью, можно исключить.

Таким образом, можно видеть, что потенциальный уровень ВВП не является величиной, раз и навсегда заданной. С течением времени экономика может переступать через текущее его значение и развиваться далее.

2. Динамика в модели *AD*/*AS* со статичными ожиданиями при классической функции AD

Рассмотрим теперь динамическую модель AD/AS со статичными ожиданиями при классической функции AD. В соответствии с монетарным правилом уравнение совокупного спроса в классической теории при постоянной скорости обращения денег $(\dot{V} = 0)$ имеет вид (24). Функция AS при статичных ожиданиях задается зависимостью (16). Проанализируем на качественном уровне поведение экономики, описываемой уравнениями (16), (24). Если уровень инфляции выше темпа прироста денежной массы $(\pi > \dot{m})$, то уровень ВВП будет возрастать;

и, наоборот, при $\pi < \dot{m}$ величина ВВП падает. В другом ракурсе: если текущий ВВП превышает потенциальную величину $(Y > Y^*)$, то будут нарастать инфляционные процессы, а при $Y < Y^*$ темп инфляции будет падать. Фазовый портрет динамики этой макроэкономической системы показан на рис. 9. Направленность сил, действующих в экономике в отношении темпа роста цен и уровня ВВП, приводит к возникновению «инфляционной спирали».

Рассмотрим процесс адаптации экономической системы к стимулирующему воздействию в кредитно-денежной сфере (рис. 10). Допустим, что в результате проведения стимулирующей кредитно-денежной политики темп роста денежной массы возрастает от уровня $\dot{m}_0$ до $\dot{m}_1$. Для того чтобы изобразить возникающую инфляционную спираль, выразим из уравнений совокупного предложения (15) и спроса (соответствующего (24) при дискретном времени) $Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-1}(\dot{m} + \pi_t)$ уровень инфляции через объемы ВВП:

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y_t - Y^*}{Y^*}\right) = \pi_{t-1} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{Y_t}{Y^*}; \quad (28)$$

$$\pi_t = \dot{m} - \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \dot{m} + 1 - \frac{Y_t}{Y_{t-1}}. \quad (29)$$

Здесь подразумевается, что темп прироста денежной массы, как и другие переменные, является дискретным: $\dot{m} = \frac{M_t - M_{t-1}}{M_{t-1}}$.

Рис. 9. Инфляционная спираль при неоклассической функции динамического совокупного спроса (случай стимулирующей кредитно-денежной политики)

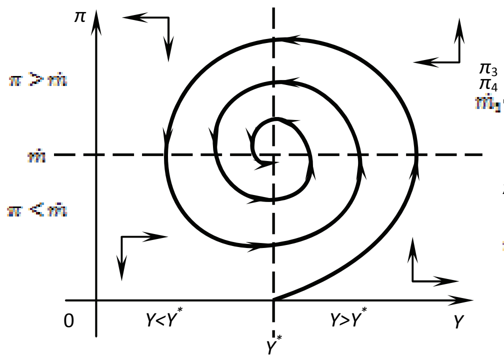
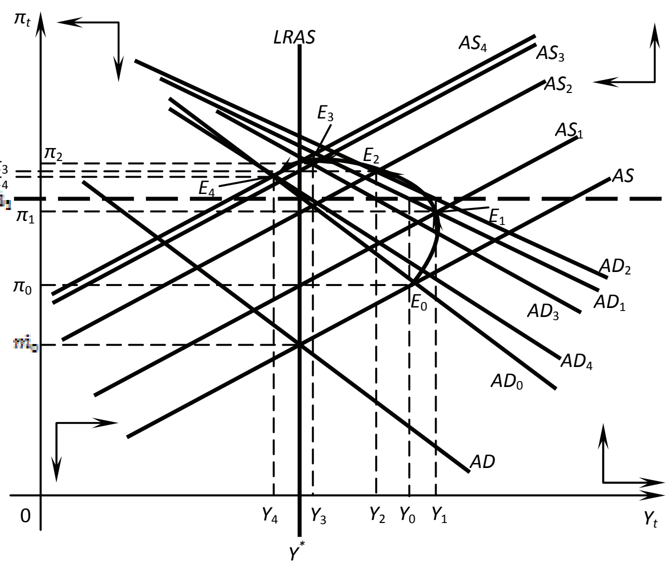


Рис. 10. Процесс адаптации экономической системы к стимулирующему воздействию в кредитно-денежной сфере при неоклассической функции динамического совокупного спроса



Из уравнения (28) видно, что при $Y_t = Y^*$ $\pi_t = \pi_{t-1}$; а из уравнения (29) следует, что при $Y_t = Y_{t-1}$, $\pi_t = \dot{m}$. Таким образом, график функции AS_t проходит через точку с координатами (Y^*, π_{t-1}), а график AD_t – через точку $(Y_{t-1}, \dot{m})$, $t > 0$ (рис. 10).

Допустим, что первоначально, при темпе прироста денежной массы $\dot{m}_0$, экономика характеризовалась функциями спроса и предложения AD и AS соответственно и находилась в состоянии долгосрочного равновесия при $\pi_t = \dot{m}_0$, полностью реализуя свой потенциал Y^*. При увеличении темпа прироста денежной массы до уровня $\dot{m}_1$ совокупный спрос в соответствии с уравнением (29) сдвигается в положение AD_0, и возникает новое, краткосрочное равновесие E_0 с возросшим уровнем инфляции π_0 и ВВП Y_0.

Поскольку в каждый момент времени уровень предыдущего периода определяет абсолютное значение тангенса угла наклона линии совокупного спроса (29), при понижении ВВП ее угловой коэффициент по абсолютной величине в будущем периоде будет возрастать и, наоборот, при увеличении ВВП – уменьшаться. Что касается темпа инфляции, то его текущее значение будет определять параллельное смещение линии совокупного предложения в следующий момент времени. Если темп инфляции увеличивается, то совокупное предложение сдвинется вправо-вверх, если он уменьшается – то влево-вниз.

Это значит, что в следующий период (№ 1) угол наклона линии совокупного спроса (AD_1) снизится ввиду увеличения ВВП предыдущего периода $(Y_0 = Y^*)$, а совокупное предложение сдвинется влево-вверх в положение AD_0 в силу увеличения предыдущего темпа инфляции $(\pi_0 = \dot{m}_0)$. В результате краткосрочное равновесие переместится в точку E_1. Проводя те же рассуждения еще раз, приходим к следующему положению равновесия E_2, где уровень инфляции (π_2) оказывается выше темпа прироста денежной массы $(\dot{m}_1)$, а текущий объем ВВП (Y_2) снижается по отношению к предыдущему значению (Y_1). Это значит, что в последующий период (№ 3) угловой коэффициент совокупного спроса (AD_3) возрастает, в то время как совокупное предложение продолжит смещаться влево-вверх (в положение AS_3). Экономика попадет в точку краткосрочного равновесия E_3. Проводя аналогичную итерацию еще раз, приходим в состояние краткосрочного равновесия E_4, когда уровень ВВП (Y_4) оказывается ниже экономического потенциала (Y^*).

В результате возникает инфляционная спираль, которая подчиняется закономерностям, сформулированным выше применительно к непрерывному времени. В итоге после бесконечного числа итераций экономика возвратится на потенциальный уровень ВВП Y^* при возросшем уровне инфляции, соответствующем новому темпу роста денежной массы $\dot{m}_1$.

Вернемся к анализу модели (16), (24) в непрерывном времени. Если предположить, что в базовом периоде экономика функционировала на уровне потенциального ВВП (11), то динамическая функция AS (16) принимает вид (17). Запишем условие динамического равновесия

$(AD = AS)$, используя усиленную рациональными ожиданиями функцию совокупного предложения (17): $\frac{\dot{M}}{M} - \pi = \frac{\beta}{\alpha}\dot{\pi}$.

Перейдем к логарифмической шкале измерения денежной массы:

$$\frac{\beta}{\alpha}\dot{\pi} + \pi = \dot{m}. \tag{30}$$

Мы получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение относительно темпа инфляции π и скорости его изменения $\dot{\pi}$. Для того чтобы найти его решение, вначале решаем соответствующее однородное дифференциальное уравнение $\dot{\pi} = -\frac{\alpha}{\beta}\pi$. Разделяем переменные $\left(\frac{d\pi}{\pi} = -\frac{\alpha}{\beta}dt\right)$ и интегрируем: $\int d\ln\pi = -\frac{\alpha}{\beta}\int dt + \ln c$, т.е. $\pi = ce^{-\frac{\alpha}{\beta}t}$.

Далее используем метод вариации постоянной, подставляя $\pi = c(t)e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}$ в неоднородное уравнение (30). После несложных преобразований получаем уравнение в дифференциалах относительно множителя $c(t)$: $dc = \frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dm$. Интегрируя данное уравнение, находим искомое выражение для варьируемого множителя: $c = \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dm + c_1$. Итак, получаем общее решение исходного неоднородного уравнения (30): $\pi(t) = c_1e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} + \frac{\alpha}{\beta}e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\int e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dm$. Константу интегрирования определим по уровню инфляции в нулевой момент времени: $c_1 = \pi(0) - \frac{\alpha}{\beta}\ln M(0)$. В итоге решение уравнения (30) приобретает вид:

$$\pi(t) = e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\left(\pi(0) - \frac{\alpha}{\beta}\ln M(0) + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dm\right).$$

Преобразуем его, интегрируя $e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dm$ по частям:

$$\pi(t) = e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\left(\pi(0) - \frac{\alpha}{\beta}\ln M(0) + \frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}m(t) - \frac{\alpha}{\beta}\int m(t)de^{\frac{\alpha}{\beta}t}\right) =$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{\beta}t}\left(\frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}m(t) - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\int m(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt\right).$$

Рассмотрим поведение системы в пределе, на бесконечно удаленном временнум интервале:

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\pi(0) - \frac{\alpha}{\beta}\ln M(0) + \frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}m(t) - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\int m(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}{e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}.$$

В данном пределе присутствует неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t}\int m(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt = m(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$:

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}m(t)-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\int m(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}dt}{\frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{\beta}\dot{m}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2e^{\frac{\alpha}{\beta}t}m(t)-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2m(t)e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}{\frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\alpha}{\beta}t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\dot{m}.$$

Таким образом, в соответствии с принципами классической макроэкономической теории при статичных ожиданиях с течением времени в пределе (при $t\to\infty$) уровень инфляции уравнивается с темпом прироста денежной массы. При этом ВВП достигает потенциального уровня. Итак, наличие ожиданий является необходимым условием для нейтральности денег в динамическом аспекте.

3. Макроэкономическая динамика при кейнсианском совокупном спросе и простейшем уравнении совокупного предложения

Перейдем к анализу динамического равновесия в кейнсианской макромодели, вначале при простейшей функции AS. Перепишем динамическую функцию AS (10) в виде: $\pi(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Y(t)-Y^*}{Y^*}\right)$. Уравнение AD в статике в соответствии с (23) перепишем следующим образом: $Y=A+B\frac{M}{P}$, где $A=\frac{f(G_0+I_0+G_0)}{kd+f(1-MPC(1-t))}$, $B=\frac{d}{kd+f(1-MPC(1-t))}$. В силу того, что скорость изменения денежной массы в реальном выражении представляет собой разность темпа прироста номинальной денежной массы $\dot{m}$ и уровня инфляции π, умноженную на величину реальной денежной массы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)=\frac{M}{P}\left(\frac{dM/dt}{M}-\frac{dP/dt}{P}\right), \tag{31}$$

динамическое уравнение *AD* можно представить в следующем виде:

$$\dot{Y}=B\frac{M}{P}\left(\frac{\dot{M}}{M}-\pi\right). \tag{32}$$

Тогда условие динамического макроравновесия $(AD=AS)$ будет таким:

$$\dot{Y}=B\frac{M}{P}\left(\frac{\dot{M}}{M}-\frac{\alpha}{\beta}\frac{Y}{Y^*}+\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

или:
$$\dot{Y}=B\frac{M}{P}\frac{\dot{M}}{M}-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}Y+\frac{\alpha B}{\beta}\frac{M}{P}. \tag{33}$$

Для решения данного неоднородного линейного дифференциального уравнения необходимо вначале решить соответствующее однородное уравнение: $\dot{Y}=-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}Y$.

Разделяем переменные $\frac{dY}{Y}=-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}dt$ и интегрируем его: $\ln Y=-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt+\ln c$. Потенцируя, получаем решение анализируемого однородного дифференциального уравнения, к которому применяем метод вариации постоянной: $Y(t)=c(t)e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}$. Подставляя его в исходное неоднородное уравнение, после очевидных преобразований получаем следующее дифференциальное уравнение для варьируемого множителя: $dc = B\frac{M}{p}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}dm + \frac{\alpha B}{\beta}\frac{M}{p}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}dt$.

Интегрируем данное уравнение:

$$c = B\int\frac{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}{p}dM + Y^* e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} + c_1.$$

Подстановка данного соотношения в общее решение однородного уравнения дает общее решение исходного неоднородного уравнения (33):

$$Y(t) = Y^* + \left(c_1 + B\int\frac{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}{p}dM\right)e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}.$$

По объему ВВП в нулевой момент времени определим константу интегрирования: $c_1 = Y(0) - Y^* - \frac{BM(0)}{P(0)}$. В итоге решение уравнения (33) таково:

$$Y(t) - Y^* + \left(Y(0) - Y^* - \frac{BM(0)}{P(0)} + B\int\frac{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}{p}dM\right)e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}.$$

Поскольку величина $\frac{\int\frac{M}{P}dt}{t} \equiv \frac{\overline{M}}{P}$ может рассматриваться как средняя величина реальной денежной массы, умножение выражения в скобках на экспоненту здесь может трактоваться как дисконтирование по среднему значению денежной массы в реальном выражении: $e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} = e^{-\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{\overline{M}}{P}t}$.

Рассмотрим поведение ВВП в пределе, в бесконечно удаленный момент времени:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^* + \lim_{t\to\infty}\frac{Y(0) - Y^* - \frac{BM(0)}{P(0)} + B\int\frac{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}{P}dM}{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}. \qquad (34)$$

Проинтегрируем $\frac{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}{P}dM$ по частям:

$$\int\frac{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}{P}dM = \frac{M}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} - \frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 dt + \int\frac{M}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\frac{\dot{P}}{P}dt.$$

С учетом данных вычислений предел (34) можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = Y^* + \qquad (35)$$

$$+\lim_{t\to\infty}\frac{Y(0) - Y^* - \frac{BM(0)}{P(0)} + B\left(\frac{M}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} - \frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 dt + \int\frac{M}{P^2}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}dP\right)}{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\int\frac{M}{P}dt = \frac{M}{P} > 0$, постольку $\int\frac{M}{P}dt$ монотонно возрастает. Следовательно, поскольку $\frac{\alpha B}{\beta Y^*} > 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} = +\infty$.

Поскольку $\frac{d}{dt}\int e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 dt = e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 > 0$, постольку $\int e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 dt$ монотонно возрастает. То же самое можно сказать и об $\int \frac{M}{P^2} e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} dP$: $\frac{d}{dt}\int \frac{M}{P^2} e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} dP = \frac{M}{P} e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\frac{\dot P}{P} > 0$ в условиях инфляционного роста цен ($\pi > 0$). Следовательно, в пределе (35) присутствует неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{BM}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt} - \frac{\alpha B^2}{\beta Y^*}\int e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 dt + B\int\frac{M}{P^2}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}dP}{e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{B\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\right) - \frac{\alpha B^2}{\beta Y^*}\frac{d}{dt}\int e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 dt + B\frac{d}{dt}\int\frac{M}{P^2}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}dP}{\frac{d}{dt}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{Be^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\frac{M}{P}\left(\frac{\dot M}{M} - \frac{\dot P}{P}\right) + \frac{\alpha B^2}{\beta Y^*}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 - \frac{\alpha B^2}{\beta Y^*}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\left(\frac{M}{P}\right)^2 + B\frac{M}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}\frac{\dot P}{P}}{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\frac{M}{P}e^{\frac{\alpha B}{\beta Y^*}\int\frac{M}{P}dt}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\dot M}{M}\frac{\beta}{\alpha}Y^*.$$

Следовательно, при отсутствии ожиданий кейнсианская модель в пределе, на бесконечно удаленном временнум интервале описывается тем же соотношением (27), что и неоклассическая, – эти модели оказываются асимптотически эквивалентными.

Таким образом, аналогично случаю неоклассической функции *AD* отказ от учета ожиданий в функции *AS* приводит к тому, что в кейнсианской макромодели деньги не являются нейтральными. В пределе существует прямая зависимость ВВП от темпа прироста денежной массы. Если темп прироста денежной массы в пределе будет нулевым, то объем ВВП будет стремиться к потенциально возможному. Однако модель допускает расширение народнохозяйственных возможностей – экономического потенциала страны: при увеличении денежной массы ВВП с течением времени в пределе (при $t \to \infty$) будет выходить за рамки своего потенциального уровня.

4. Динамическая кейнсианская модель совокупного спроса и предложения с учетом ожиданий

Проанализируем теперь динамику кейнсианской модели с учетом ожиданий. Если усилить ожиданиями функцию совокупного предложения, то поведение макроэкономической системы будет описываться уравнениями (16), (32). В дискретном времени уравнение совокупного спроса, соответствующее (32), будет иметь вид:

$$Y_t = Y_{t-1} + B\frac{M}{P}(\dot{m} - \pi_t), \qquad (36)$$

а совокупное предложение описывается выражением (15).

Траектория динамики экономической системы будет аналогичной проанализированной ранее в ситуации неоклассического совокупного спроса с той лишь разницей, что в силу (31) при $\dot{m} > \pi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right) > 0$, т.е. реальная денежная масса возрастает, а значит, увеличивается угловой коэффициент линии AD (36). Соответственно при $\dot{m} < \pi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right) < 0$ и отношение M/P убывает, следовательно, линия совокупного спроса (36) становится более пологой. Объем ВВП данного, произвольного периода будет определять параллельное смещение линии *AD* в следующий момент времени.

Возникают инфляционно-дефляционные спирали, соответствующие различным видам экономической политики государства. Для того чтобы изобразить траекторию динамики экономической системы, выразим из уравнения совокупного спроса (36) уровень инфляции через объемы ВВП:

$$\pi_t = \dot{m} + \frac{PY_{t-1}}{BM} - \frac{PY_t}{BM}. \qquad (37)$$

Уравнение совокупного предложения (15) принимает вид (28).

Очевидно, что при $\dot{m} > \pi$ отношение M/P будет возрастать, а значит, график данной обратной функции совокупного спроса (37) становится более «пологим». Соответственно при $\dot{m} < \pi$ реальная денежная масса убывает, следовательно, будет увеличиваться угловой коэффициент линии совокупного спроса (37). При этом, если объем ВВП возрастает по сравнению с предшествующим значением, то в следующий момент времени линия AD переместится выше и правее; и, наоборот, при сокращении ВВП – в будущем периоде совокупный спрос сдвинется влево-вниз.

Как следует из уравнения (28), при $Y_t = Y^*$ $\pi_t = \pi_{t-1}$; а кейнсианское уравнение совокупного спроса (37) свидетельствует о том, что при $Y_t = Y_{t-1}$ $\pi_t = \dot{m}$. Таким образом, как и при классической функции совокупного спроса, график функции AS_t проходит через точку с координатами (Y^*, π_{t-1}), а график AD_t – через точку $(Y_{t-1}, \dot{m})$, $t > 0$.

Рассмотрим процесс адаптации экономической системы к стимулирующему воздействию в кредитно-денежной сфере (рис. 11). Пусть исходно, при темпе прироста денежной массы $\dot{m}_0$, экономика характеризовалась функциями спроса и предложения AD и AS соответственно и находилась в состоянии долгосрочного равновесия при $\pi_t = \dot{m}_0$, полностью реализуя свой потенциал Y^*. Допустим, что в результате проведения стимулирующей кредитно-денежной политики темп роста денежной массы возрастает от уровня $\dot{m}_0$ до $\dot{m}_1$.

Происходит сдвиг функции совокупного спроса в положение AD_C, и в качестве новой точки отсчета получаем краткосрочное равновесие E_0 с возросшим темпом инфляции $\pi_0 < \dot{m}_1$ и уровнем ВВП Y_0. Это значит, что в следующий момент времени совокупное предложение (28) сдвинется влево-вверх, а совокупный спрос переместится вправо-вверх и повернется против часовой стрелки (AD_1). При этом экономика окажется в точке E_1. Повторная итерация переведет систему в положение, когда уровень инфляции уже превысит темп прироста денежной массы $(\pi_2 > \dot{m}_1)$, а ВВП начнет снижаться $(Y_2 < Y_1)$. Это значит, что в следующий момент времени совокупный спрос уже сдвинется вниз и повернется по часовой стрелке (AD_3), тогда как совокупное предложение продолжит смещаться вверх (AS_3). Следующая аналогичная итерация переведет экономику из положения E_3 в точку E_4. При этом уровень инфляции начнет снижаться, а ВВП упадет ниже потенциала.

Таким образом, возникает инфляционная спираль, и экономика возвращается на потенциальный уровень ВВП при возросшем уровне инфляции, соответствующем новому темпу роста денежной массы $\dot{m}_1$.

Однократное воздействие в финансовой сфере, например единовременное вливание в экономику денег, в долгосрочном плане никак не скажется на параметрах равновесия (рис. 12). В результате первоначального, мгновенного увеличения темпа прироста денежной массы (который сразу же возвращается на исходный уровень) линия совокупного спроса AD, задаваемая соотношением (37), перемещается вверх в положение AD_C. AD_1 сдвигается выше по отношению к AD_0 за счет возросшего объема ВВП и, поскольку $\dot{m} < \pi$, поворачивается по часовой стрелке. AS_1 окажется выше и левее по сравнению с AS в силу возросшего темпа инфляции в предыдущий период. В новом равновесии E_1 темп инфляции увеличится по сравнению с предыдущим значением π_0, оставаясь выше темпа прироста денежной массы $\dot{m}$; а ВВП (Y_1) окажется ниже предыдущего уровня (Y_0). Это значит, что в следующий момент совокупное предложение продолжит сдвигаться вверх – в положение AS_2, а совокупный спрос (AD_2) сместится вниз, поворачиваясь по часовой стрелке. В новом краткосрочном равновесии E_2 и ВВП, и инфляция сократятся по сравнению с предыдущими значениями. Теперь уже не только совокупный спрос, но и совокупное предложение начнет сдвигаться вниз. Инфляционная спираль возвращает экономику в первоначальное состояние долгосрочного равновесия E, соответствующее полной реализации экономического потенциала при неизменном темпе роста денежной массы и прежнем уровне инфляции $(\pi_0 = \dot{m}_0)$.

Рис. 11. Процесс адаптации экономической системы к усилению кредитно-денежной экспансии при кейнсианской функции динамического совокупного спроса

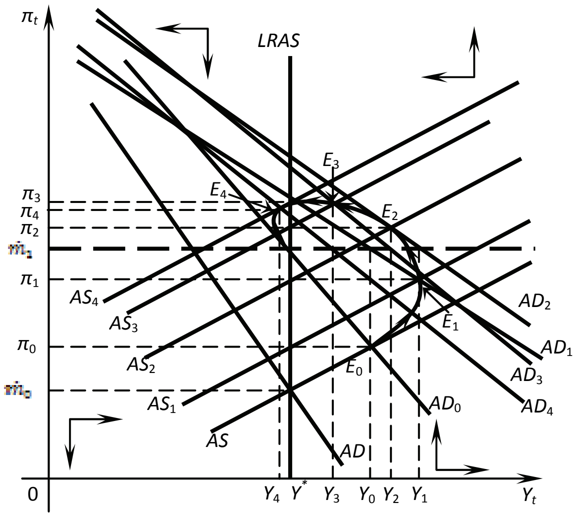
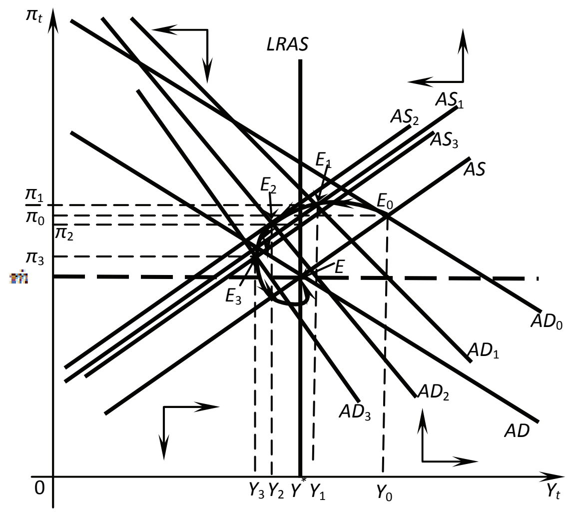


Рис. 12. Процесс адаптации экономической системы к единовременному стимулирующему воздействию кредитно-денежной политики государства при кейнсианской функции динамического совокупного спроса



Заключение

Итак, нами проанализирована агрегированная динамика экономической системы, описываемой классической и кейнсианской функциями совокупного спроса при совокупном предложении с учетом и без учета ожиданий. Решение возникающих при этом дифференциальных уравнений показывает, что инфляционная подпитка может стимулировать увеличение потенциального уровня ВВП. В частности, в отличие от статичного равновесия при отсутствии ожиданий в неоклассической концепции так же, как и в кейнсианской, исчезает нейтральность денег, и данные два подхода оказываются асимптотически эквивалентыми.

Список литературы

Lipsey R.G. The relationship between unemployment and the rate of change of the money wage rates in the U.K. 1862–1957: a further analysis // Economica. — 1960 (Feb.).

Phillips A.W. The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1862–1957 // Economica. — 1958. — № 100.

Samuelson P.A., Solow R.M. Analytical aspects of anti-inflation policy // American economic review. — l960. — Vol. 50. — № 2.

Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004.

Рощин С.Ю., Разумова Т.О. Экономика труда. – М.: Инфра-М, 2001.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 2-е изд. – М.: Наука, 1969.

MONETARY POLICY AND ECONOMIC POTENCIAL

Verenikin A.O.
Ph.D., Professor
MSU
Faculty of Economics
(Moscow, Russia)

Abstract

The paper treats aggregate dynamics of an economic system subject to either neoclassical or Keynessian aggregate demand and aggregate supply with or without expectations. The corresponding differential equations prove that inflationary stimulation can augment potential GDP. In particular, under neoclassical as well as under Keynessian demand, unlike static equilibrium, in dynamics money becomes non-neutral, and these two approaches prove to be asymptotically equivalent.

Key words: Phillips curve, monetary rule, static expectations, dynamic aggregate demand and supply curves, inflationary cycles.

JEL-codes: E 120, E 130, E 310.