

ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПОКУПАТЕЛЯ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ*

Николаенко Дмитрий Николаевич

Аспирант

МГУ имени М.В. Ломоносова,

Экономический факультет

(г. Москва, Россия)

Аннотация

В работе обосновывается вид функции ожидаемой полезности и оптимизационной задачи, описывающей поведение покупателя на финансовом рынке. Данный результат можно считать первым шагом для применения теоретико-игровых методов для описания процессов, происходящих на финансовом рынке.

Ключевые слова: финансовый рынок, оптимальный портфель, фундаментальная стоимость.

JEL коды: G11, C61.

Введение. Поведение покупателей на финансовом рынке

В работе из соображений простоты рассматривается ситуация, когда игроки являются безразличными к риску. При осуществлении сделок такие агенты принимают решения, которые в целом с некоторыми естественными оговорками отношения к риску укладываются (в простом смысле, показанном, например, в учебнике (Шарп и др., 2001)) в философию «математическое ожидание – дисперсия», изложенную в работах (Markowitz, 1952), и в концепцию «математическое ожидание – стандартное отклонение», применяемую, например, в статье (Sharpe, 1964). Последняя воспринимается Марковицем как более реалистичная в контексте позитивной экономики картина подхода к выбору оптимального портфеля (согласно, например, работам (Markowitz, 1991) и (Markowitz, 2008) по сравнению с применением в ней дисперсии вместо стандартного отклонения. В такой философии принятия решений игроки, с одной стороны – при одинаковых рисках альтернатив для определения торговых действий предпочитают большее ожидаемое значение прибыли или доходности меньшему. С другой стороны, при одинаковых ожидаемых величинах доходности или прибыли альтернатив несклонные к риску агенты предпочитают меньший риск, означающий наличие меньшей разбросанности возможных реализаций прибыли или доходности вокруг ожидаемой величины, большему риску.

* Статья подготовлена на основе материалов кандидатской диссертации трагически погибшего Д.Н. Николаенко (19.05.1987–22.11.2019) его научным руководителем Д.В. Артамоновым.

Николаенка Д.Н., e-mail: artamonov@econ.msu.ru

В настоящей работе для простоты и наглядности вычислений чистая доходность актива (чистая прибыль в виде доходности на потраченные средства) заменяется на чистую прибыль как разницу между ранней и будущей ценами или стоимостями (а не остаётся отношением этих величин). Такой же подход (т.е. подсчёт прибыли от сделки в виде разницы выгод и затрат) для понимания функции выгод (полезности) игрока одобряется в статье (Tirole, 1982), применяется в работе (Kyle, 1989), рассматривающей формирование цен через призму равновесия Байеса–Нэша, где полезность игрока является функцией от этой чистой прибыли, записанной в виде такой разности выгод и затрат, а не от комбинаций доходностей (как, например, квадратичная функция полезности от чистой доходности портфеля активов, рассмотренная в монографии (Markowitz, 1959) и не от конечного благосостояния на планируемом временном горизонте.

Когда игроки формируют свои представления о нужных им для понимания чего-то переменных, например ожидания о будущих ценах актива, они могут предполагать в своих представлениях по каким-то причинам законы распределения этих переменных. Кейнс (Keynes, 1936) также обращает внимание на то, что игрок может на самом деле не столько формировать некоторое ожидание переменной, а просто не знать, что случится в такой ситуации. Если он всё же ограничивает возможные варианты переменной, например считает, что лишь с пренебрежительно маленькой вероятностью цена будущего торгового залпа окажется вне каких-то представляющихся ему границ, внутри которых он в замешательстве относительно того, какой исход произойдёт, то, следуя Лапласу, информация о чём приведена в работе (Allen, et al., 2003), близким к реальности представлением будет мнение, что такой игрок считает данную величину (если в данном примере – то цену) равномерно распределённой на отрезке, определяемом этими границами.

1. Постановка задачи

Пусть есть движимые заявками рынки активов, на которых игроки представляют себе будущие рыночные цены и любые другие платежи за владение активами экзогенно заданными величинами. Несмотря на это, игрок может с логичной обоснованностью рассуждать, какую цену и какой объем покупки или продажи установить в заявке. Если игрок является потенциальным покупателем (например потому, что он считает, что начинается восходящий тренд), установив максимальную цену покупки внутри предполагаемого им сегмента наиболее вероятных рыночных цен, он оказывается в ситуации, когда, согласно его представлениям, рыночная цена может оказаться ниже цены, указанной им в заявке, т.е. существует вероятность потерять возможность купить актив в этом ближайшем торговом раунде. Тем не менее игрок по некоторым причинам может не выбрать максимальную цену покупки, равную верхней границе возможных цен, или, если он считает эти границы цен достаточно правдоподобными, то может не выбрать заявку на покупку по рыночной цене, даже если он считает, что находится внизу восходящего тренда.

Пусть, например, существует игрок, цель которого заключается в максимизации ожидаемой прибыли от покупки в данный момент времени и перепродажи в следующий, когда он понимает, что перепродажа через один период уже может оказаться невыгодной (например, потому что он считает, что через один момент времени лопнет рыночный пузырь цены данного актива). Как следует из статьи (Abreu, et al., 2003), такая ситуация может оказаться

вполне реальной, потому что даже Стэнли Дракенмиллер, менеджер фонда Сороса (Quantum Fund), на вопрос, почему он не продал акции интернет-компаний во время «пузыря доткомов» 2000 г. раньше, т.е. до падения цен, несмотря на то, что понимал их завышенность хотя бы в том смысле, что они скоро начнут падать, ответил, что падение началось раньше, чем он ожидал.

2. Функция ожидаемой полезности

Функция ожидаемой полезности риск-нейтрального покупателя, который задумывается о быстрой продаже актива в будущем, или просто задумывается о продаже актива через какое-то время, не рассматривая продажу после наступления этого ближайшего периода времени, если он абстрагируется при покупке актива от выбора портфеля других активов, т.е. занимаясь в этом смысле только куплей-продажей одного актива, или считает ожидаемую прибыль от его купли с последующей перепродажей или владением без перепродажи максимальной среди всех возможных изменений позиций управляемого им портфеля, может выглядеть так, как показано в уравнениях (1) и (2) при условии, что он ставит в лимитной заявке на покупку цену $\widehat{p}_{i,j}$:

$$E(\pi_j | \widehat{p}_{i,j}) = Prob(\widehat{p}_{i,j} \geq p_{i,m}) \times (E\widetilde{c}_{i,j} q_{i,j} | \widehat{p}_{i,j} \geq p_{i,m}) - E(p_{i,m} q_{i,j} | \widehat{p}_{i,j} \geq p_{i,m}); \quad (1)$$

$$E(\pi_j | \widehat{p}_{j,l}) = \frac{\widehat{p}_{j,l} - p_{j,i,l}}{p_{j,i,h} - p_{j,i,l}} \left(c_{j,i} - \frac{\widehat{p}_{j,l} + p_{j,i,l}}{2} \right). \quad (2)$$

В предлагаемых обозначениях π_j – это прибыль j -го игрока (j принадлежит некоторому множеству игроков J), $\widehat{p}_{i,j}$ – это цена в приказе на покупку i -го актива ($i = 1, \dots, N$) j -м трейдером, $p_{j,i,h}, p_{j,i,l}$ – это соответственно верхняя (high) граница цен покупки актива в ближайшем торговом раунде, $\widetilde{c}_{i,j}$ – это суммарный платёж и нижняя (low) границы, согласно представлениям игрока j , потенциальных по активу i после возможности его перепродажи как случайная величина с точки зрения трейдера j (в данной ситуации в терминах работы (Grossman, 1976) – это фактически представляющаяся игроку j «ликвидационная стоимость» актива i) $q_{i,j}$ – это количество актива i , купленного игроком j в некотором раннем периоде для последующей его перепродажи и (или) владения им с целью получения за это платежей. Агент решает задачу (3) при условии, что обладает некоторым положительным доходом или фактически максимизирует функцию (2) по цене, указываемой в заявке, если предполагается, как в статье (Glosten, et al., 1985), что он покупает именно одну единицу актива по экзогенным для самой оптимизационной задачи он может выбирать $q_{i,j}$, исходя из максимальной возможной цены, чтобы точно суметь оплатить при имеющемся бюджете запрашиваемое количество актива. В последнем случае предположение об экзогенно заданном единичном спросе является своего рода нормированием индивидуальных количеств спроса, причинам, поскольку в случае решения задачи (3) при ограничении доходом, который может представлять собой такой один лот. Кроме того, трейдер может считать, что, несмотря на просьбу о покупаемом количестве, ему в среднем удастся получить в результате работы торговой системы в целом другое количество актива, например, равное $q_{i,j}$.

3. Задача максимизации

Хотя в работе (Glosten, 1989) не представлено подробного объяснения, почему рискованный портфель несклонного к риску покупателя состоит только из одного актива, в случае риск-нейтрального агента задача (3) является естественной, поскольку его портфель пополняется активами, по его мнению, приносящими наибольшую по сравнению с другими ожидаемую прибыль. Поэтому таковым может оказаться именно актив i

$$\max_{p_{j,i,l} \leq \widehat{p}_{j,l} \leq p_{j,i,h}; q_{i,j}} E(\pi_j | \widehat{p}_{j,l}) = \frac{\widehat{p}_{j,l} - p_{j,i,l}}{p_{j,i,h} - p_{j,i,l}} \left(c_{j,i} - \frac{\widehat{p}_{j,l} + p_{j,i,l}}{2} \right) q_{i,j}. \quad (3)$$

Когда $c_{j,i} \in (p_{j,i,l}; p_{j,i,h}]$ и $\widehat{p}_{j,l} \in [p_{j,i,l}; p_{j,i,h}]$, график $E(\pi_j | \widehat{p}_{j,l})$ как функция от $\widehat{p}_{j,l}$ при заданном $q_{i,j}$ является параболой, ветви которой направлены вниз, если $q_{i,j}$ – это положительное число, но ветви которой идут вверх, когда $q_{i,j}$ – отрицательное число. Задача максимизации (3) именно при положительных числах $q_{i,j}$ представляет собой истинную задачу покупателя j , если $c_{j,i} \in (p_{j,i,l}; p_{j,i,h}]$, потому что для $\widehat{p}_{j,l} > p_{j,i,h}$ ожидаемая полезность агента j равна $\left(c_{j,i} - \frac{\widehat{p}_{j,l} + p_{j,i,l}}{2} \right) q_{i,j}$, а при $\widehat{p}_{j,l} < p_{j,i,h}$ ожидаемая прибыль игрока j оказывается нулевой. В отличие от максимизации функции полезности с постоянной абсолютной несклонностью к риску в задаче выбора оптимального портфеля для отрицательных $q_{i,j}$ проблема (3) уже не является задачей определения оптимальной заявки (цены и количества) на продажу единиц актива в ближайшем торговом раунде за счёт короткой продажи, т.е. займа единиц актива с последующей продажей, а затем покупкой ради их возвращения и по возможности получения положительной прибыли, потому что в максимизируемой функции применяются вероятности успешной покупки в ближайшем торговом раунде, а не продажи, осуществляемой без займа актива. Таким образом, если в задаче покупателя j оценка ликвидационной стоимости $c_{j,i} \in (p_{j,i,l}; p_{j,i,h}]$, то

$$\widehat{p}_{j,l,*} = c_{j,i} = E(\widetilde{c}_{j,l} | \widehat{p}_{j,l} \geq p_{i,m}), \quad (4)$$

где $\widehat{p}_{j,l,*}$ – это оптимальный выбор цены, указываемой в заявке на покупку в ближайшем торговом раунде.

Уравнение (4) показывает, что в процессе, когда покупатель рассчитывает перепродать актив по фундаментальной стоимости (которая воспринимается как результат отсутствия арбитража для какого-то периода времени или просто как некоторая обоснованная адекватная цена), то такой покупатель, решая для себя вопрос с рисками неполучения актива и получения невысокой прибыли в результате получения актива устанавливает в заявке цену, равную именно этой оценке фундаментальной стоимости, если считает, что она принадлежит промежутку текущих возможных цен, который (промежуток) покупатель примерно пытается представить себе, когда смотрит на стакан котировок.

Заключение

В работе построена оптимизационная задача, описывающая поведение покупателя на финансовом рынке. Дальнейшая логика задачи выбора величины цены в оптимальной заявке

при наличии риска цены исполнения сделки покажет, что в заявке в качестве цены оценка фундаментальной стоимости не указывается игроком, а показывается только граница промежутка текущих цен. Таким образом, игра на фондовом рынке так устроена, что в цене игроками, рассчитывающими на перепродажу на более или менее длительном промежутке времени, не показывается величина фундаментальной стоимости.

Список литературы

- Шарп У., Александер Г.Д., Брэйли Д.В. Инвестиции. – М.: ИНФРА, 2001.
- Abreu D., Brunnermeier M.K. Bubbles and Crashes // *Econometrica*. – 2003. – Vol. 71. – No 1. – P. 173–204.
- Allen F., Morris S., Shin H.S. Beauty Contests, Bubbles and Iterated Expectations in Asset Markets Cowles Foundation Discussion Paper. – 2003.
- Glosten L.R. Insider Trading, Liquidity, and the Role of the Monopolist Specialist // *The Journal of Business*. – 1989. – Vol. 62. – No 2. – P. 211–235.
- Glosten L. R. и Milgrom L. R. Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders // *Journal of Financial Economics*. – 1985. – Vol. 14. – No 1. – P. 71–100.
- Grossman S. On the efficiency of competitive stock markets where trades have diverse information // *The Journal of Finance*. – 1976. – Vol. 31. – No 2. – P. 573–585.
- Keynes J. M. The general theory of interest, employment and money. – London : MacMillan, 1936.
- Kyle A. S. Informed Speculation with Imperfect Competition // *The Review of Economic Studies*. – 1989. – Vol. 56. – No 3. – P. 317–355.
- Markowitz H Foundations of Portfolio Theory // *Journal of Finance*. – 1991. – Vol. 46. – No 2. – P. 469–477.
- Markowitz H. Portfolio Selection // *The Journal of Finance*. – 1952. – Vol. 7. – No 1. – P. 77–91.
- Markowitz H. CAPM Investors Do Not Get Paid for Bearing Risk: A Linear Relation Does Not Imply Payment for Risk // *The Journal of Portfolio Management*. – 2008. – P. 91–94.
- Markowitz H. Portfolio Selection. – New York: John Wiley & Son, 1959.
- Sharpe W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of // *Journal of Finance*. – 1964. – Vol. 19. – No. 3. – P. 425–442.
- Tirole J. On the Possibility of Speculation under Rational Expectations // *Econometrica*. – 1982. – Vol. 50. – No 5. – P. 1163–1181.

UTILITY FUNCTION IN THE PROBLEM OF DESCRIBING BUYER BEHAVIOR ON THE FINANCIAL MARKET

Dmitriy N. Nikolaenko

PhD student

Lomonosov Moscow State University

Faculty of Economics

(Moscow, Russia)

Abstract

In the paper a utility function which describes a behaviour of a buyer on a financial market is derived. The obtained result is a first step towards an application of the game theory to description of processes taking place on a financial.

Key words: financial marked, optimal portpholio.

JEL codes: G11,C61.